Die Irrationalität von $\sqrt{2}$

Hilfssatz:

Das Quadrat einer geraden Zahl ist wieder gerade.

Beweis:

Sei $n \in \mathbb{N}$ eine beliebige gerade Zahl.
Dann ist 2 ein Teiler von n.

$$\Rightarrow \exists m \in \mathbb{N}: \quad n = 2 \cdot m.$$

Betrachten wir das Quadrat von n:

$$n^2 = (2 \cdot m)^2 = 4m^2 = 2 \cdot 2m^2.$$

$2m^2$ ist wieder eine natürliche Zahl, da weder Quadrieren noch Multiplizieren aus $\mathbb{N}$ hinausführt.
Sei $k = 2m^2 \in \mathbb{N}$. Dann gilt also:

$$n^2 = 2k \Rightarrow n^2 \text{ ist gerade.} \quad \square$$

Hilfssatz:

Ist eine Quadratzahl gerade, so ist sie auch durch 4 teilbar.

Beweis:

Sei $m \in \mathbb{N}$ eine Quadratzahl, dann $\exists n \in \mathbb{N}: m = n^2$.
Ist m gerade, so gilt: 2 ist Teiler von m.

$$\Rightarrow \exists p \in \mathbb{N}: \quad 2 \cdot p = m = n^2 = n \cdot n$$

Da $n \in \mathbb{N}$ muss 2 in der Primzahlzerlegung von n enthalten sein.

$$\Rightarrow 2 \text{ ist Teiler von } n \Rightarrow \exists r \in \mathbb{N}: \; n = 2r.$$

$$\Rightarrow m = n \cdot n = 2r \cdot 2r = 4r^2 \Rightarrow 4 \text{ teilt } m. \quad \square$$

Satz $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. $\qquad \mathbb{Q} = \{ \frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z} \wedge q \in \mathbb{N} \}$

Beweis durch „reductio ad absurdum":

Angenommen $\sqrt{2} \in \mathbb{Q} \Longrightarrow \exists\, p \in \mathbb{Z} \wedge q \in \mathbb{N}: \sqrt{2} = \frac{p}{q}$.
Es sei zudem gefordert, dass $\frac{p}{q}$ eindeutig ist, also, dass p/q vollständig gekürzt ist. (immer möglich!)
D.h. $\nexists\, t \in \mathbb{Z}$: t teilt p und t teilt q.

Dann: $\sqrt{2} \cdot q = p \quad \mid (\ldots)^2$

$$(\sqrt{2}\, q)^2 = p^2$$
$$\sqrt{2}^2 q^2 = p^2$$
$$2 \cdot q^2 = p^2$$

$\Longrightarrow p^2$ ist gerade $\Longrightarrow$ 2 teilt $p^2 \overset{\text{Hs2}}{\Longrightarrow}$ 4 teilt p^2
$\Longrightarrow$ 2 teilt $p \Longrightarrow \exists\, r \in \mathbb{N}: p = 2r$.

Also
$$2q^2 = (2r)^2$$
$$2q^2 = 4r^2 \quad |:2$$
$$q^2 = 2r^2 \Longrightarrow q^2 \text{ ist gerade} \overset{\text{wie oben}}{\Longrightarrow} 2 \text{ teilt } q.$$

$\Longrightarrow$ p/q kann kein vollständig gekürzter Bruch sein.

$\Longrightarrow$ p/q ist ein Bruch, der sich nicht vollständig kürzen lässt.
$\lightning$ zu $p \in \mathbb{Z} \wedge q \in \mathbb{N}$.

$\square$