# Die Intervallschachtelung

Für die meisten Anwendungen von Zahlen genügt es ihren Wert auf wenige Stellen genau zu wissen.
Ein Näherungswert wie 3,14 für $\pi$ ist dabei ein Dezimalbruch, kann also als Bruch $\frac{314}{100}$ geschrieben werden und liegt daher in den rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$.

**Erinnerung**

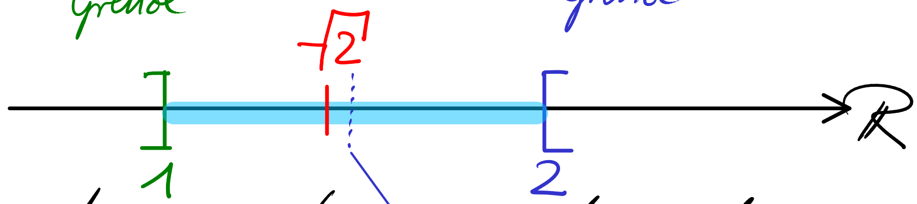
Ein Intervall ist eine zusammenhängende Menge.

z. B. $]0;2]$ bezeichnet alle Zahlen x, die die Ungleichungen $0 < x$ und $x \leq 2$ erfüllen.

Doch wie kann man einen rationalen Näherungswert für eine irrationale Zahl wie $\sqrt{2}$ finden?

**Idee:** Man sucht immer kleinere Intervalle, deren Grenzen rationale Zahlen sind und die stets $\sqrt{2}$ enthalten.

**Bsp.:**



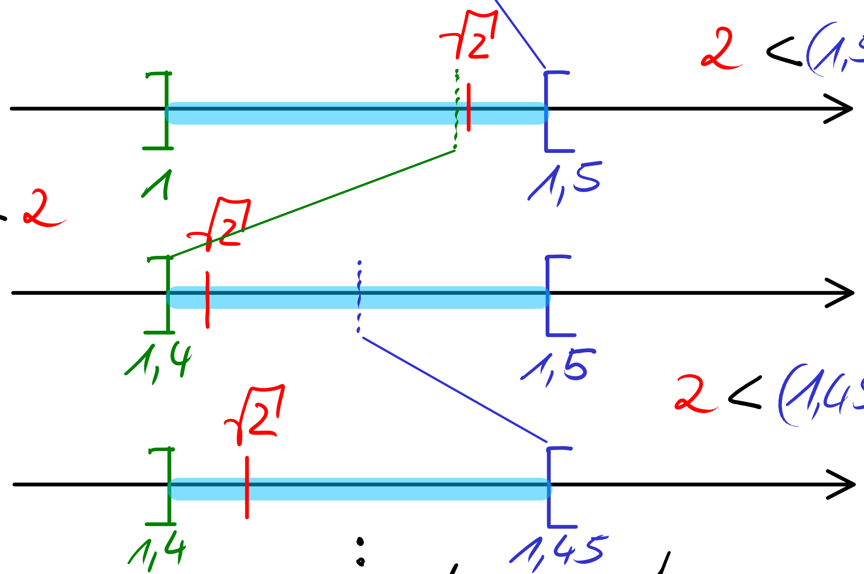

$\sqrt{2}$ liegt sicher zwischen 1 und 2, denn

$$1^2 = 1 < (\sqrt{2})^2 = 2 < 2^2 = 4.$$

$$2 < (1{,}5)^2 = 2{,}25$$

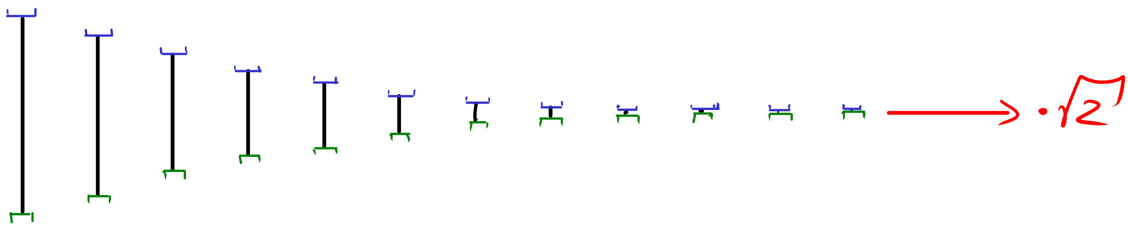
$$(1{,}4)^2 = 1{,}96 < 2$$

$$2 < (1{,}45)^2 = 2{,}1025$$




⋮ und so weiter

Wichtig:
- Intervalle werden kleiner
- jedes neue Intervall ist im alten enthalten




Dieses schrittweise Annähern ist sehr mühsam.
Die Grundfrage dabei ist: Wie finde ich die nächsten Grenzen?

Um das Verfahren mit einer Maschine <u>automatisieren</u> zu können, muss man folgende Bedingungen erfüllen:

1. In jedem Schritt darf man nur eine der beiden Grenzen des Intervalls verändern.
2. Der neue Wert für diese Grenze muss sich eindeutig nach einer festen Regel aus den bisherigen Grenzen berechnen lassen.

Eine mögliche Umsetzung dieser Bedingungen sind folgende Regeln:

- Als neuen Wert für eine Grenze des nächsten Intervalls wählt man die Mitte des letzten.

$$\text{Mitte} \quad m = \frac{oG + uG}{2}$$

- Gilt dann $m^2 > 2$,
  dann ist $m$ die neue obere Grenze.
- Gilt hingegen $m^2 < 2$,
  dann ist $m$ die neue untere Grenze.

($m^2 = 2$ kann ja nicht auftreten, da $m \in \mathbb{Q}$.)

Das funktioniert natürlich auch mit anderen Radikanden als der 2.
Von einem Algorithmus darf man hier dann sprechen, wenn man zusätzlich festlegt, wann das Verfahren endet.

Bsp.: Automatisierbare Intervallschachtelung für $\sqrt{5}$

Das Verfahren soll enden, wenn die ersten zwei Nachkommastellen bekannt sind!

① $\sqrt{5} \in ]2;3[$, da $2^2=4<5<3^2=9$

$m = \frac{2+3}{2} = 2{,}5$

$m^2 = (2{,}5)^2 = 6{,}25 > 5 \Rightarrow m \longrightarrow oG$

② $\sqrt{5} \in ]2;2{,}5[$

$m = \frac{2+2{,}5}{2} = 2{,}25$

$m^2 = (2{,}25)^2 = 5{,}0625 > 5 \Rightarrow m \longrightarrow oG$

③ $\sqrt{5} \in ]2;2{,}25[$

$m = 2{,}125 \qquad m^2 = (2{,}125)^2 = 4{,}515625 \longrightarrow uG$

④ $\sqrt{5} \in ]2{,}125;2{,}25[$

$m = 2{,}1875 \qquad m^2 = 4{,}78515625 \longrightarrow uG$

⑤ $\sqrt{5} \in ]2{,}1875;2{,}25[$

$m = 2{,}21875 \qquad m^2 = 4{,}9228515625 \longrightarrow uG$

⑥ $\sqrt{5} \in ]2{,}21875;2{,}25[$, also $\sqrt{5} \approx 2{,}2$

$m = 2{,}234375 \qquad m^2 \approx 4{,}992431640\!63 \longrightarrow uG$

⑦ $\sqrt{5} \in ]2{,}234375;2{,}25[$

$m = 2{,}2421875 \qquad m^2 \approx 5{,}02740478516 \longrightarrow oG$

⑧ $\sqrt{5} \in ]2{,}234375;2{,}2421875[$

$m = 2{,}23828125 \qquad m^2 \approx 5{,}0099029541 \longrightarrow oG$

⑨ $\sqrt{5} \in ]2{,}234375;2{,}23828125[$,

also $\sqrt{5} \approx 2{,}23$.