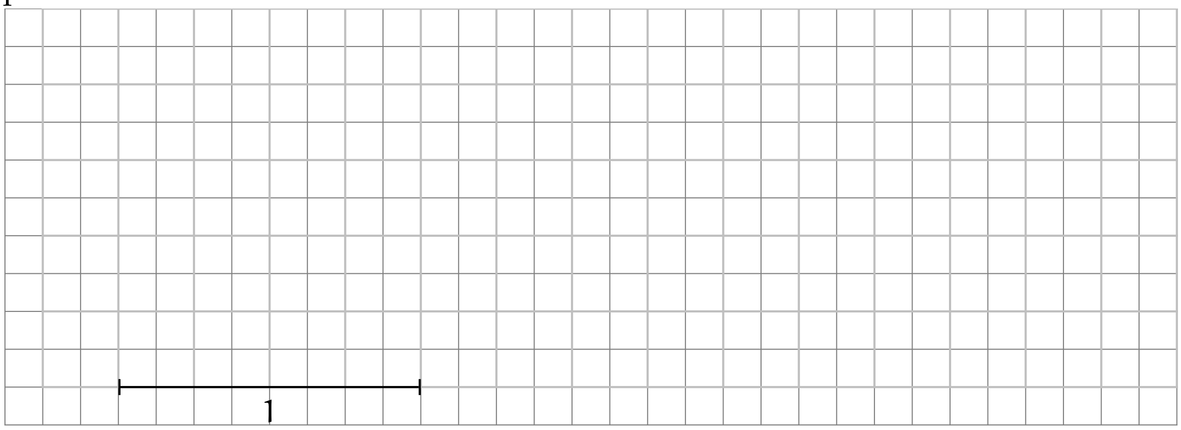
Die näherungsweise Berechnung einer Quadratwurzel nach HERON

Die $\sqrt{2}$ hatten wir definiert als die Seitenlänge eines Quadrats mit Flächeninhalt 2. Um $\sqrt{2}$ zu finden, muss man also ein solches Quadrat konstruieren.

Während die Intervallschachtelung einen rein ______________________ Weg zur Bestimmung der Quadratwurzel darstellt, gelang es HERON VON ALEXANDRIA im 1. Jahrhundert n.Chr., ____________________ und ________________ miteinander zu vereinen.

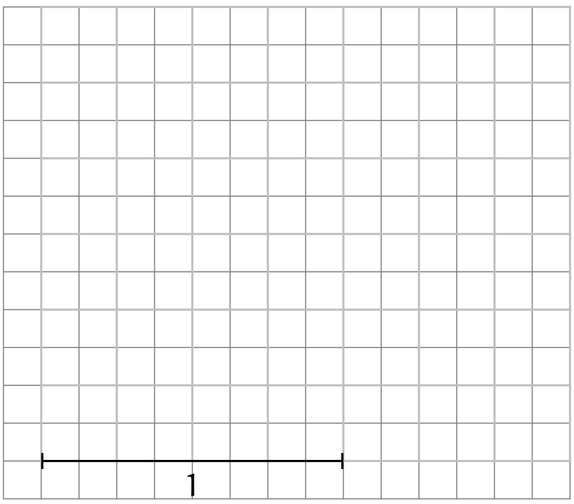
Er gab ein __________________ [1] Rechenverfahren an. Die grundlegende Idee ist, schrittweise aus einem __________________ ein __________________ zu machen.

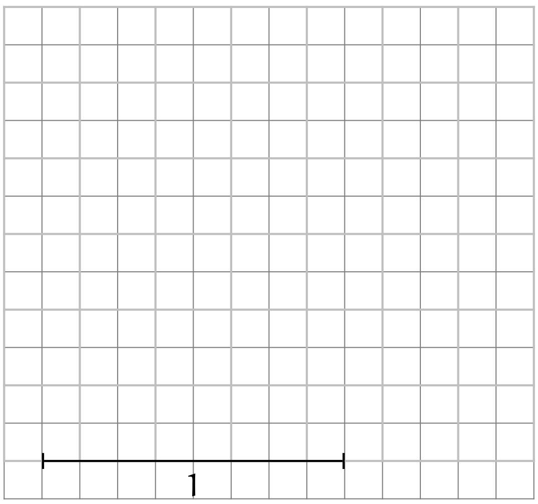
Zeichne ein Rechteck mit dem Flächeninhalt 2, wobei die Einheit genau 4 cm entspricht.



Dieses Rechteck unterscheidet sich deutlich von einem Quadrat, doch kennen wir die Seitenlängen sehr gut, sie sind ________________________________ .

Zeichne zweimal ein neues Rechteck mit Flächeninhalt 2. Wähle dazu für eine der beiden Seitenlängen jeweils genau den Mittelwert der beiden Seitenlängen des jeweils letzten Rechtecks.





[1] auf Wiederholung beruhendes

Vervollständige die Tabelle mit Hilfe des Taschenrechners:

Schritt n	Seitenlänge x_n	Seitenlänge $y_n = \frac{2}{x_n}$	Mittelwert $x_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2}$	Unterschied $\varepsilon = \lvert x_n - y_n \rvert$
0	1	2	1,5	1
1	1,5			
2				
3				
4				

n gibt die Anzahl der ____________________ (Wiederholungen) an. x_n, y_n bezeichnen jeweils die Seitenlängen. ε gibt die Abweichung zwischen x_n und y_n an.

Bereits im ____ Schritt ist $\varepsilon =$ ___ ! D.h. die Genauigkeit des Taschrechners reicht ____ ____________________________ .

Der Werte von x_4 entspricht auf ____________________ genau der ________ .

Bestimme mit dem gleichen Verfahren $\sqrt{5}$ bis zur Genauigkeitsgrenze des Taschenrechners.

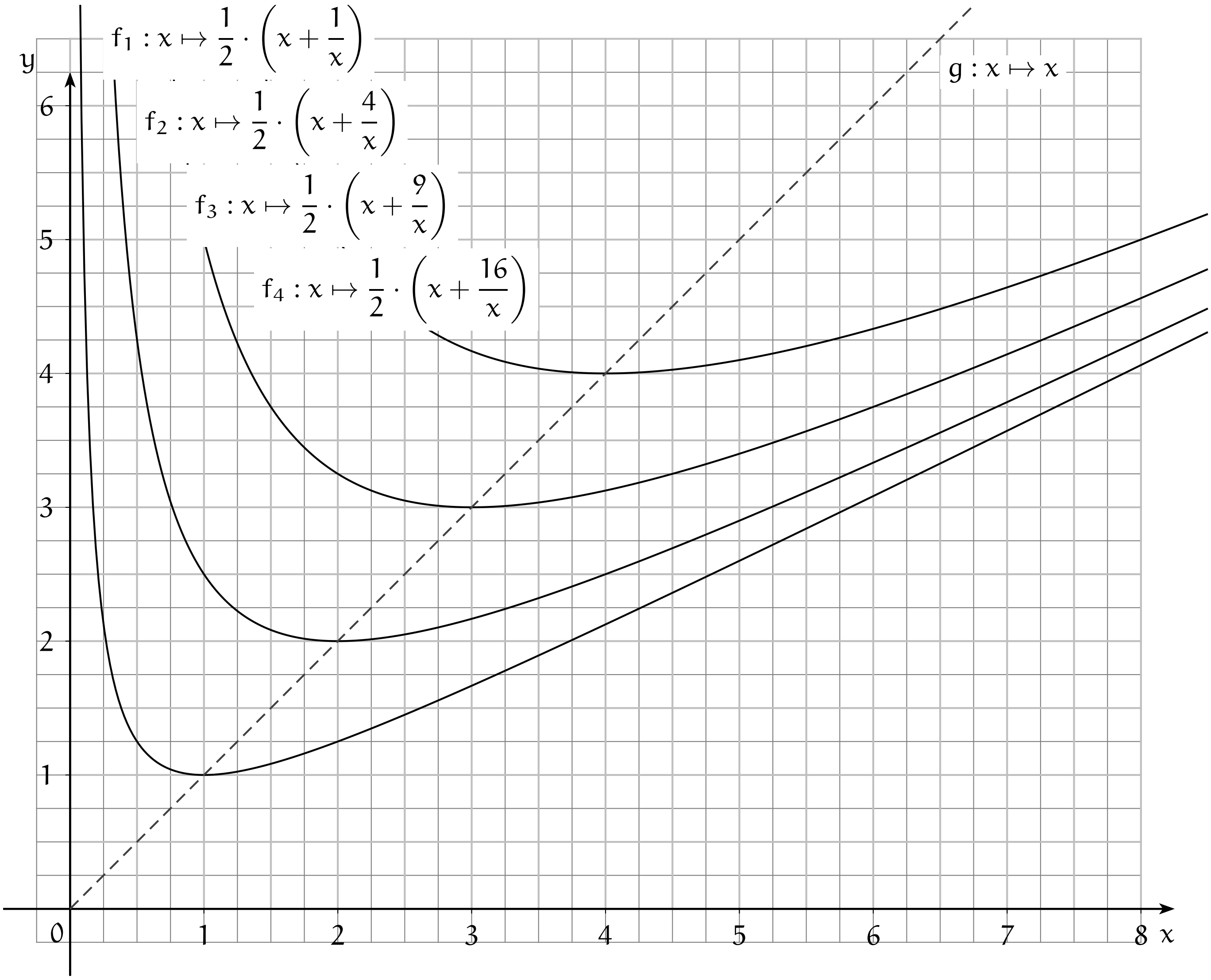
n	x_n	$y_n = \frac{5}{x_n}$	$x_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2}$	$\varepsilon = \lvert x_n - y_n \rvert$
0	5	1		4
1				
2				
3				
4				
5				

HERONS Verfahren mit Funktionsgraphen

Die folgenden Kurven sind die Funktionsgraphen der Funktionen $f(x) = \frac{1}{2} \cdot \left(x + \frac{A}{x}\right)$ und der Geraden $g(x) = y = x$.

Am Graphen von f kann man für jedes x den Mittelwert von ______________ ablesen.

g dient lediglich dazu $y = f(x)$ ____.



Welche Quadratwurzeln können mit den gezeichneten Graphen grafisch bestimmt werden?

____

Bestimme näherungsweise $\sqrt{16}$, indem Du mit $x_0 = 8$ startest.

Berechne näherungsweise $\sqrt{35}$ mit dem Startwert 7:

n	x_n	$y_n = \frac{A}{x_n}$	$x_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2}$	$\varepsilon = \lvert x_n - y_n \rvert$
0	7	5		
1				
2				
3				

Berechne näherungsweise $\sqrt{35}$ mit dem Startwert 3:

n	x_n	$y_n = \frac{A}{x_n}$	$x_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2}$	$\varepsilon = \lvert x_n - y_n \rvert$
0	3			
1				
2				
3				

Heron-Verfahren in `Pascal`:

```
function Heron(flaeche: real; max_n: integer; epsilon: real):real;
var n: integer;    // Schritte, ganze Zahl
    x: real;       // erste Seitenlänge, reelle Zahl
    y: real;       // zweite Seitenlänge, reelle Zahl
begin
|  x := 1;         // erste Seite startet bei 1
|  y := flaeche/x; // Berechnung der zweiten Seitenlänge
|  n := 0;         // Anzahl der Schritte noch null
|  repeat          // Wiederhole so lange...
|  |  x := (x+y)/2;
|  |  y := flaeche/x;
|  |  n := n+1;
|  until ((abs(y-x) < epsilon) or (n >= max_n));  // bis genau genug berechnet.
|  Heron := x; // Übergabe des berechneten Werts an Hauptprogramm.
end;
```